# SOMMA DEI QUADRATI DEI PRIMI n NUMERI NATURALI

February 22, 2015

Si desidera calcolare una formula per la seguente sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + .... + n^2$$

per ricavarla si parte dal cubo di un binomio:

$$(1+i)^3 = 1 + 3i^2 + 3i + i^3$$

sottraiamo i due cubi:

$$-i^3 + (i+1)^3 = 1 + 3i^2 + 3i$$

applichiamo i simboli di sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} (1+i)^3 - i^3 = \sum_{i=1}^{n} 1 + 3i^2 + 3i$$

riconosciamo nel primo membro una serie telescopica, dove tutti gli elementi si annullano tra loro tranne il primo e l'ultimo

$$-1 + (n+1)^3 = \sum_{i=1}^{n} 1 + 3i^2 + 3i$$

applichiamo la proprietà di linearità delle sommatorie

$$-1 + (n+1)^3 = \sum_{i=1}^{n} 1 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i$$

l'ultima è una somma di successione aritmetica

$$-1 + (n+1)^3 = n + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2}$$

moltiplichiamo tutto per 2 per sbarazzarci della frazione

$$-2 + 2(n+1)^3 = 2n + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3n(n+1)$$

isoliamo l'espressione che vogliamo valutare e mettiamo un po' di ordine

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2n - 2$$

raccogliamo il fattore (n+1) e il fattore -2

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)(2(n+1)^2 - 3n) - 2(n+1)$$

sviluppiamo il quadrato del binomio

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)(2(n^2+2n+1) - 3n) - 2(n+1)$$

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)(2n^2+4n+2-3n) - 2(n+1)$$

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)(2n^2+n+2) - 2(n+1)$$

raccolgo il fattore (n+1)

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)((2n^2+n+2) - 2)$$

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)(2n^2+n)$$

raccolgo n

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$$

ottenendo finalmente la formula seguente:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## Dimostrazione alternativa

Un appproccio alternativo è il seguente, basato sull'osservazione che la somma dei primi n numeri dispari è uguale al quadrato di n. Ossia: $1 = 1^2$; $\quad 1+3 = 4 = 2^2$; $\quad 1+3+5 = 9 = 3^2$;.....
se desideriamo la somma di tutti gli n quadrati, conteremmo il valore 1 n volte, il 3 n-1 volte e così via ossia otterremo l'espressione:

$$1n + 3(n-1) + 5(n-2) + (2n-1)1$$

otteniamo quindi la seguente formulazione:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)(n-k+1)$$

sviluppando il secondo membro otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (-2k^2 + 2k(n+1) - (n+1) + k$$

$$3\sum k^2 = 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2(n+1)\frac{n(n+1)}{2} - n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)(n(n+1) - n + \frac{n}{2})$$

moltiplico tutto per 2

$$6\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)(2n(n+1) - 2n + n$$

$$6\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)(2n(n+1) - n)$$

$$6\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2(n+1) - 1)$$

$$6\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \square$$